W rachunku prawdopodobieństwa **wartość oczekiwana** (inaczej wartość przeciętna, wartość średnia, nadzieja matematyczna) skokowej (dyskretnej) zmiennej losowej jest sumą iloczynów wartości tej zmiennej losowej oraz prawdopodobieństw, z jakimi te wartości są przyjmowane.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Wariancja to klasyczna miara zmienności. Wyraża zróżnicowanie zbiorowości, jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń poszczególnych wartości cechy od średniej arytmetycznej zbiorowości.

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \cdot p_i$$

Odchylenie standardowe

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

Przykładowe rozkłady zmiennych losowych skokowych

1) Rozkład dwupunktowy

Z rozkładem dwupunktowym mamy do czynienia wówczas, gdy w wyniku doświadczenia możemy uzyskać tylko jedną z dwóch wartości zmiennej losowej: x_1 lub x_2 z prawdopodobieństwami odpowiednio p oraz 1-p. W szczególnym przypadku, gdy $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 1$ rozkład ten nazywany jest rozkładem zero-jedynkowym.

2) Rozkład dwumianowy (Bernouliego)

Rozkład dwumianowy występuje wówczas, gdy przeprowadza się *n* jednakowych doświadczeń, z których każde może zakończyć się jednym z dwóch wyników: „sukcesem" z prawdopodobieństwem *p* lub „porażką" z prawdopodobieństwem 1-*p*. Zmienną losową X w tym eksperymencie jest liczba sukcesów w *n* próbach.

Rozkład prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulliego jest określony wzorem:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

gdzie

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ **;** ***k*****-liczba sukcesów;** ***n*** **– liczba prób;** ***p*****- prawdopodobieństwo sukcesu**

$$E(X)=n\cdot p \quad D^2(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$$

$$D(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

3) Rozkład Poissona

jest rozkładem zmiennej losowej skokowej, z którym mamy do czynienia w przypadku określania prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń stosunkowo rzadkich i niezależnych od siebie, takich jak np. liczba usterek w produkowanej partii materiału. Rozkład Poissona jest przybliżeniem rozkładu Bernoulliego dla dużych prób i przy małym prawdopodobieństwie zajścia zdarzenia („sukcesu”).

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$

e - podstawa logarytmów naturalnych (e=2,718…)

λ - stała, która jest wartością oczekiwaną i równocześnie wariancją rozkładu,

Przykładowe rozkłady zmiennych losowych ciągłych

1) Rozkład jednostajny

Jest to najprostszy z rozkładów zmiennej losowej ciągłej. Mamy z nim do czynienia wtedy, gdy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest stałe w pewnym przedziale <a, b>. Funkcja gęstości tego rozkładu jest dana wzorem:

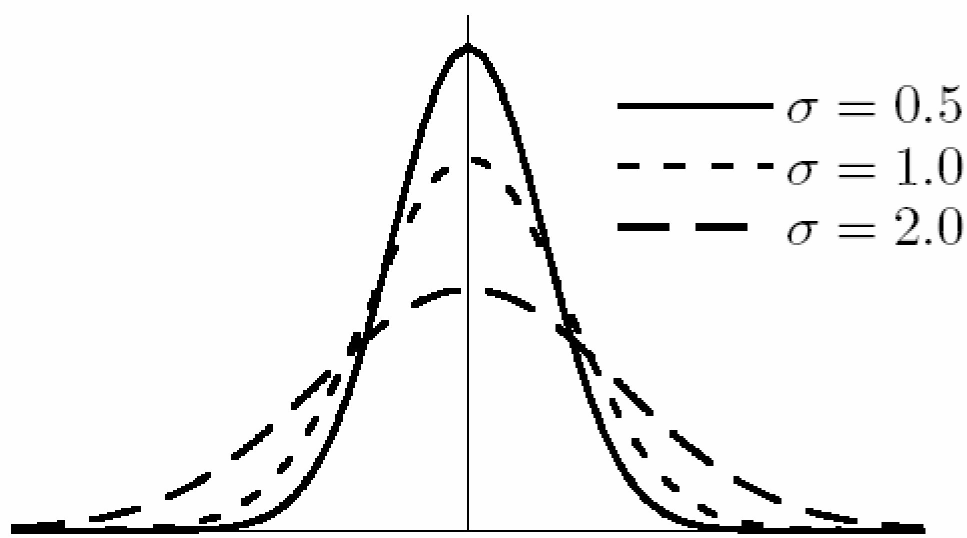
$$f(x)= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a,b] \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad D(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

2) **Rozkład normalny**, zwany także rozkładem Gaussa-Laplace'a jest najczęściej spotykanym w naturze rozkładem zmiennej losowej ciągłej. Ciągła zmienna losowa X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ co oznaczamy $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, jeśli jej funkcja gęstości – określona dla wszystkich rzeczywistych wartości x – da się przedstawić za pomocą wzoru:

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\mu = E(X)$, $\sigma = D(X)$



Standaryzacja

Jeżeli X~N(μ,σ^2)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P\{X \in (a,b)\} = P\left\{Z \in \left(\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right\}$$
$$= F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Prawo trzech sigm

$$P\{|X-\mu| < \sigma\} = 0.68268 \approx 0.68$$

$$P\{|X-\mu| < 2\sigma\} = 0.95450 \approx 0.95$$

$$P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = 0.99730 \approx 0.997$$