Było:

Testowanie hipotez (ogólnie):

- **stawiamy hipotezę,**
- **wybieramy funkcję testową f (test statystyczny),**
- **przyjmujemy poziom istotności α; tym samym wyznaczamy obszar krytyczny testu (wartość krytyczną funkcji testowej f_{kryt}),**
- **losujemy próbę, wyliczamy wartość empiryczną funkcji testowej f_{emp},**
- **hipotezę odrzucamy, gdy wartość empiryczna f_{emp} znajduje się w obszarze krytycznym; w przeciwnym przypadku hipotezy nie odrzucamy.**

Przykład na tablicy...

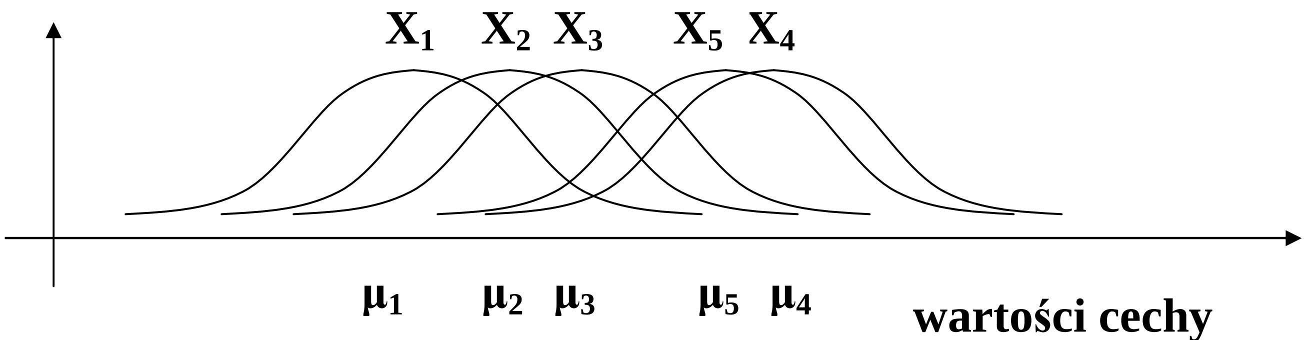
<u>Przykład</u>. Porównano pięć odmian pszenicy ozimej pod względem plonowania. W tabeli zapisano uzyskane wysokości plonów (w kg z poletka):

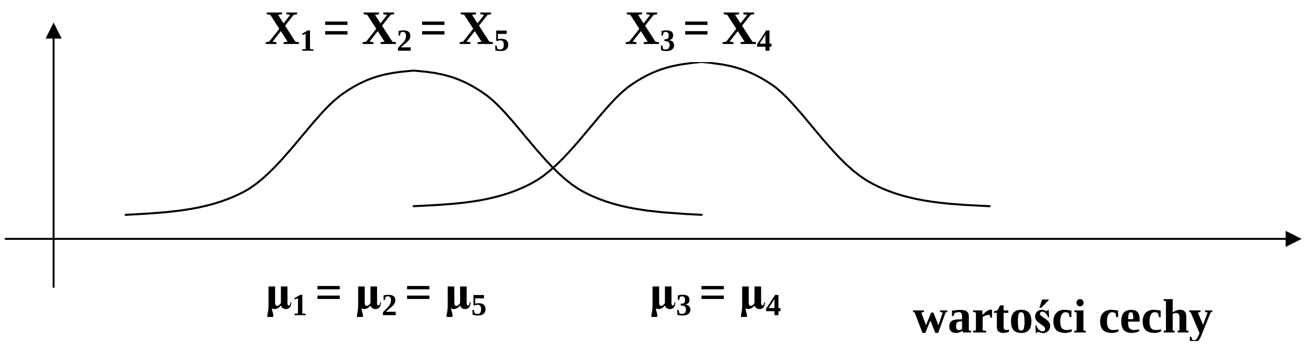
Odmiana	Plony			
	poletko 1	poletko 2	poletko 3	poletko 4
O1	1,47	1,41	1,40	1,43
O2	1,10	1,15	1,30	1,17
O3	1,41	1,32	1,28	1,33
O4	1,19	1,25	1,26	1,21
O5	1,20	1,35	1,25	1,28

Cecha X_i – plon z poletka dla odminy Oi, $i = 1, 2, ..., 5$,

Założenia: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, ..., 5$;

$X_1, X_2, ..., X_5$ **– niezależne zmienne losowe**





Pytanie: **Czy badane odmiany plonują na podobnym poziomie?**

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \ ?$$

Hipoteza: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

(mówi o braku zróżnicowania między pięcioma badanymi odmianami pod względem plonowania)

Dygresja o czynnikach kształtujących plon ...

WYKŁAD 10

DOŚWIADCZENIE JEDNOCZYNNIKOWE W UKŁADZIE CAŁKOWICIE LOSOWYM - ANALIZA WARIANCJI

Terminologia stosowana w doświadczeniach czynnikowych:

- **Problem badany w doświadczeniu: porównanie plonowania odmian O1, O2, ..., O5 pszenicy ozimej (badanie wpływu odmian O1, O2, ..., O5 na wysokość plonu)**
- **Cecha mierzona w doświadczeniu: X – wielkość plonu z poletka.**
- **Badany czynnik: A - odmiana.**

Dygresja:

1. Czy na wysokość plonowania wpływa $\underbrace{\text{odmiana}}_{\textbf{czynnik A}}$?

2. Czy na wysokość plonowania wpływa $\underbrace{\text{odmiana}}_{\textbf{czynnik A}}$ oraz $\underbrace{\text{nawożenie}}_{\textbf{czynnik B}}$?

3. Czy na wysokość plonowania wpływa $\underbrace{\text{odmiana}}_{\textbf{czynnik A}}$, $\underbrace{\text{nawożenie}}_{\textbf{czynnik B}}$ oraz $\underbrace{\text{termin siewu}}_{\textbf{czynnik C}}$?

I ogólniej: można badać wpływ jednego (A), dwóch (A, B), trzech (A, B, C) lub większej liczby **czynników** na wartość mierzonej cechy.

Terminologia cd.:

- **Poziomy czynnika A (obiekty): poszczególne odmiany: O1, O2, ..., O5; w tym doświadczeniu porównujemy 5 odmian, czyli 5 poziomów czynnika A, lub inaczej 5 obiektów,**

  ozn.: a – liczba poziomów czynnika A, a = 5.
- **Powtórzenia: każda z odmian występuje na czterech poletkach, czyli w czterech powtórzeniach; liczba powtórzeń n = 4.**
- **Jednostki doświadczalne: poletka; liczba jednostek doświadczalnych N = 20 (ogólniej: $N = a \cdot n$, gdy liczba powtórzeń jest jednakowa dla każdego poziomu czynnika A; $N = n_1 + n_2 + ... + n_a$, gdy liczby powtórzeń nie są jednakowe dla wszystkich poziomów czynnika A).**
- **Układ doświadczalny (plan doświadczenia) – opisuje sposób rozmieszczenia jednostek doświadczalnych na powierzchni doświadczalnej. Losowe przyporządkowanie obiektów do jednostek doświadczalnych nazywa się układem całkowicie losowym.**

Przykład. W doświadczeniu polowym założonym w układzie całkowicie losowym w czterech powtórzeniach porównano pięć odmian pszenicy ozimej pod względem plonowania. W tabeli zapisano wysokości plonów (w kg z poletka):

Odmiana	Plony			
	poletko 1	poletko 2	poletko 3	poletko 4
O1	1,47	1,41	1,40	1,43
O2	1,10	1,15	1,30	1,17
O3	1,41	1,32	1,28	1,33
O4	1,19	1,25	1,26	1,21
O5	1,20	1,35	1,25	1,28

Pytania:

1. **Czy wszystkie badane odmiany plonują na podobnym poziomie?**
2. **Jeśli nie wszystkie, to które odmiany plonują podobnie?**

Terminologia cd.

- **Wyniki pomiaru cechy uzyskane w doświadczeniu przedstawia się w tabeli; takie zestawienie wyników nazywa się jednokierunkową klasyfikacją danych (jednokierunkowa – bo doświadczenie jest jednoczynnikowe).**

Jednokierunkowa klasyfikacja danych

Poziomy czynnika A (odmiany)	**Nr powtórzenia (nr poletka)**			
	1	**2**	**...**	**n**
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_2}
$\vdots$			...	
A_a	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{an_a}

x_{ij} **- wartość cechy X mierzonej w doświadczeniu dla *i* – tego obiektu w *j* - tym powtórzeniu (plon dla *i*-tej odmiany na *j*-tym poletku); *i*=1, 2, ..., a; *j*=1, 2, ..., n.**

Cecha X badana w a populacjach: $X_1, X_2, ..., X_a$

założenia: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, ..., a$

$X_1, X_2, ..., X_a$ **– cechy (zmienne losowe) niezależne**

hipoteza: $H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$, $a > 2$

poziom istotności α (w przykładzie $\alpha = 0,05$);

metoda weryfikacji: analiza wariancji (jednoczynnikowa analizy wariancji);

test statystyczny: F – Fishera;

Tabela analizy wariancji (ANOVA Table)

Źródła zmienności cechy X	Sumy kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	F emp	wartość p
Source	**Sum of Squares**	**Df (*degrees of freedom*)**	**Mean Square**	**F-Ratio**	**p-value**
Czynnik A (odmiana) **Between groups**	SS_A	$Df_A = a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{Df_A}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$	
Błąd losowy **Within groups**	SS_E	$Df_E = N - a$	$MS_E = \frac{SS_E}{Df_E}$		
Całkowita **Total**	SS_T	$N - 1$			

Wzory na sumy kwadratów...

Poziomy czynnika A (odmiany)	**Nr powtórzenia (nr poletka)**				**średnie obiektowe**
	1	**2**	**...**	**n**	
$\boldsymbol{A_1}$	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n_1}	$\overline{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}$
$\boldsymbol{A_2}$	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_2}	$\overline{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}$
$\vdots$			...		
$\boldsymbol{A_a}$	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{an_a}	$\overline{x}_a = \frac{1}{n_a}\sum_{j=1}^{n_a} x_{aj}$

***i*-ta średnia obiektowa** $\overline{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, **średnia ogólna** $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

SS_A = ... , SS_T = ..., SS_E = ...,

Tabela ANOVA dla omawianego przykładu

Źródła zmienności cechy X	Sumy kwadratów SS	Stopnie swobody Df	Średni kwadrat MS	F_{emp}	wartość p
Czynnik A (odmiana)	0,149	4	$\frac{0{,}149}{4} = 0{,}0372$	$\frac{0{,}0373}{0{,}0033} = 11{,}27$	0,0002
Błąd losowy	0,049	15	$\frac{0{,}049}{15} = 0{,}0033$		
Całkowita	0,198	19			

$F_{kryt} = F_{\alpha,\, a-1,\, N-a}$

Wnioskowanie 1: jeśli $F_{emp} > F_{kryt}$, to hipotezę zerową H_0 odrzucamy, w przeciwnym przypadku hipotezy zerowej nie można odrzucić.

Wnioskowanie 2: jeśli wartość $p < \alpha$, to hipotezę zerową H_0 odrzucamy, w przeciwnym przypadku hipotezy zerowej nie można odrzucić.

W przykładzie $F_{kryt} = F_{0,05,\, 4,\, 15} = 3{,}056$, zatem H_0 odrzucamy.

Terminologia:

Gdy odrzucimy hipotezę H_0, to mówimy, że stwierdzono statystycznie istotny wpływ czynnika A na badaną cechę albo, że czynnik A wpływa istotnie różnicująco na badaną cechę.

Gdy nie odrzucimy hipotezy H_0, to mówimy, że nie stwierdzono statystycznie istotnego wpływu czynnika A na badaną cechę albo, że czynnik A nie wpływa istotnie różnicująco na badaną cechę.

W przykładzie: stwierdzono statystycznie istotne zróżnicowanie odmian pszenicy ze względu na wysokość plonu.

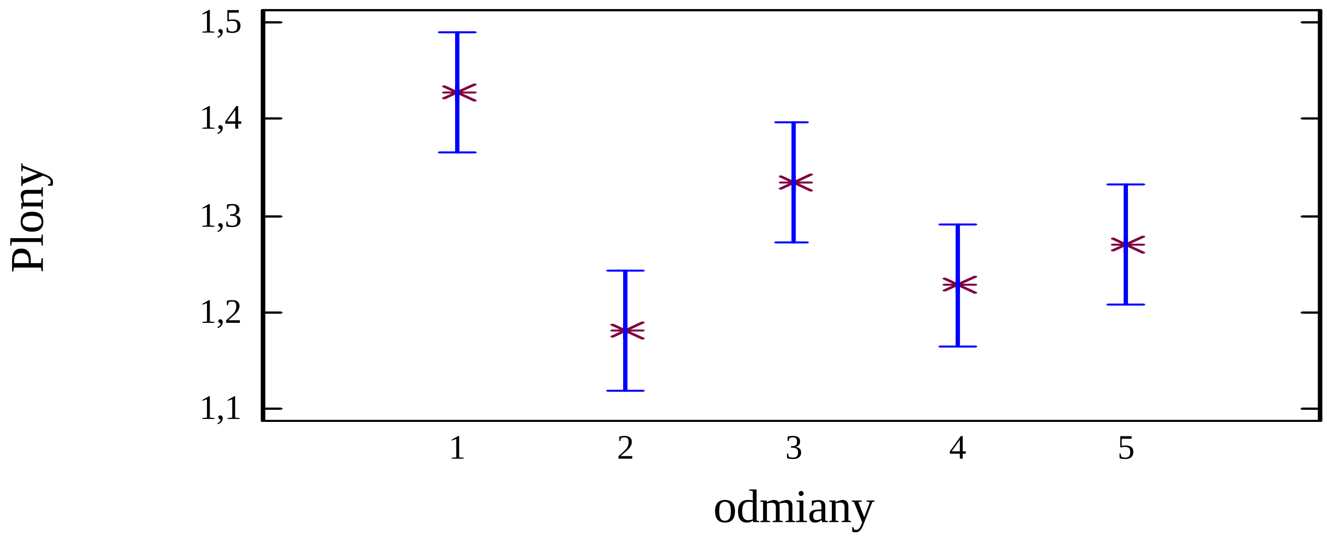
Po odrzuceniu hipotezy zerowej stosuje się porównania szczegółowe.

ANOVA Table

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	0,14927	4	0,0373175	11,51	0,0002
Within groups	0,04865	15	0,00324333		
Total (Corr.)	0,19792	19			

Means and 95,0 Percent Tukey HSD Intervals



Dokończenie poprzedniego wykładu:

Założenia:

1. **cecha X_1 ma rozkład dwupunktowy z nieznanym parametrem p_1,**
2. **cecha X_2 ma rozkład dwupunktowy z nieznanym parametrem p_2,**
3. **pobrano n_1 – elementową próbę losową z pierwszej populacji oraz n_2 – elementową próbę losową z drugiej populacji, k_i – liczba elementów wyróżnionych w i-tej próbie;** $\overline{p}_i = \frac{k_i}{n_i}$, $\overline{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$.

H_0: $p_1 = p_2$ (porównanie frakcji w dwóch populacjach), test przybliżony u (dla dużych prób), poziom istotności α.

Funkcja testowa:

$$u_{emp} = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Wnioskowanie: jeżeli $|u_{emp}| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, **to hipotezę H_0 odrzucamy, w przeciwnym przypadku H_0 nie można odrzucić.**

Przykład. W dwóch dzielnicach miasta przeprowadzono ankietę na temat sortowania odpadków w gospodarstwach domowych. Otrzymano następujące wyniki: w pierwszej na 210 ankietowanych gospodarstw w 55 sortowano odpadki, natomiast w drugiej na 130 gospodarstw w 51 sortowano odpadki. Na poziomie istotności 0,01 zweryfikuj hipotezę o jednakowej frakcji gospodarstw sortujących odpadki w obu miastach.

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

X – zmienna losowa, f(x) – funkcja gęstości, F(x) – dystrybuanta X~N (0, 1),

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
:										
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	**0,99506**	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807